

Warszawa, 31.10.2025

Dr hab. inż. Jacek Malinowski
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr inż. Kingi Marii Wójcickiej pt. „Reprezentacja pomiarów w zbiorach rozmytych”.

Recenzowana rozprawa opisuje matematyczne modelowanie niepewności związanej z pomiarami. Opracowany przez doktorantkę model łączy dwa sposoby wyrażania tej niepewności – probabilistyczny i za pomocą zbiorów rozmytych. W zależności od stosowanej metody i rodzaju mierzonej wielkości, wynik pomiaru jest sumą rzeczywistej wartości tej wielkości i losowego błędu pomiaru, albo stopniem, w jakim ten wynik przybliża daną wielkość. W pierwszym przypadku błąd pomiaru jest zmienną losową o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa, a w drugim – wartością funkcji przynależności zbioru rozmytego określonego na przestrzeni wyników.

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów. Pierwszy z nich to wstęp wprowadzający w jej tematykę. Znajdują się tam definicje używanych w pracy pojęć i opis stosowanej metodyki. Jej główne założenia to 1) podział metod oceny niepewności pomiaru na typy A i B, przy czym metoda typu A traktuje wyniki pomiaru jako próbę losową o danym rozkładzie prawdopodobieństwa, a metoda typu B określa rozkład a-priori błędów na podstawie wiedzy eksperckiej; 2) modelowanie niepewności pomiaru za pomocą zbiorów rozmytych; 3) określenie porządku w zbiorze wyników pomiaru za pomocą progu rozróżnialności; oraz 4) zdefiniowanie porządku w rodzinie zbiorów rozmytych w $\mathfrak{R}$ (zbiór liczb rzeczywistych) za pomocą różnicy z t-normą.

W rozdziale 2 definiowany jest pomiar jako pojęcie z algebraicznej teorii reprezentacji, czyli homomorficzne odwzorowanie pewnej struktury empirycznej w strukturę matematyczną (algebraiczną). Struktura jest tu rozumiana jako pewien zbiór z działaniami określonymi na jego elementach, a homomorfizm zachowuje te operacje. W strukturze empirycznej zbiór to obiekty poddawane pomiarom. Z kolei w strukturze matematycznej zbiór to możliwe wyniki pomiarów, które mogą być liczbami rzeczywistymi (pomiaru dokładne), zmiennymi losowymi w

przestrzeni probabilistycznej z sigma ciałem zbiorów borelowskich w $\mathfrak{R}$ (pomiaru dokładne z błędami losowymi), albo zbiorami rozmytymi w $\mathfrak{R}$ (pomiaru niedokładne).

Rozdział 3 ma kluczowe znaczenie, gdyż jest właściwym opisem proponowanej przez doktorantkę metodyki modelowania niepewności pomiaru. Jego pierwsza część zawiera definicje i opisy pojęć istotnych dla modelu probabilistycznego i rozmytego. Znajdują się tu definicje przestrzeni probabilistycznej, zmiennej losowej, zmiennej rozmytej, błędu pomiaru, niepewności jako parametru rozkładu tego błędu. Autorka analizuje też zasady superpozycji niepewności wnoszonych przez poszczególne składowe błędu złożonego. Na drugą część tego rozdziału składają się rozdział 3.4 przedstawiający transformację rozkładu prawdopodobieństwa w zbiór rozmyty poprzez zamianę przedziałów ufności na alfa-przekroje, rozdział 3.5 opisujący wyznaczanie funkcji przynależności na podstawie serii wyników pomiaru, oraz rozdział 3.6 zawierający przykładową analizę niepewności pomiaru zmiennego pola magnetycznego metodą zbiorów rozmytych. Istotnym wynikiem rozdziału 3 jest wzór zamieszczony pod koniec rozdziału 3.4.1, określający związek jaki musi istnieć między t-normą a łącznikiem (ang. Copula) określającym zależność losowych składowych błędów, aby rozkład sumy tych składowych był taki sam dla modelu probabilistycznego i rozmytego.

W rozdziale 4 przeprowadzony jest dowód twierdzenia 4.4.2 pozwalającego wyznaczać alfa-przekroje zbioru rozmytego otrzymanego w wyniku przekształcenia zbiorów rozmytych typu L-R za pomocą rosnącej funkcji ciągłej, z użyciem dowolnej t-normy. Jest to uogólnienie analogicznego twierdzenia, określającego sposób wyznaczania alfa-przekrojów sumy zbiorów typu L-R, z użyciem t-normy minimum i zastosowaniem zasady rozszerzania Zadeha. Udowodnione twierdzenie ma praktyczne znaczenie dla obliczania niepewności złożonej w sytuacji, gdy występuje więcej niż jedno źródło błędów pomiaru, a w efekcie całkowity błąd ma dwie lub więcej składowych.

Rozdział 5 zawiera przegląd własności porządku w rodzinie zbiorów rozmytych określonego przez odejmowanie tych zbiorów z użyciem dowolnej t-normy. Istotnym wynikiem jest tu twierdzenie 5.7 mówiące, że powyższy porządek implikuje porządek przedziałowy pomiędzy alfa-przekrojami tych zbiorów. Wynik ten ma znaczenie dla ustalania porządku w zbiorze wyników pomiaru, o czym jest mowa w rozdziale 1.5.

Ostatni, 6 rozdział to podsumowanie przedstawionych w rozprawie wyników, wnioski, jakie z nich wypływają, oraz określenie kierunków dalszych badań.

Ogólne uwagi, jakie się nasuwają po lekturze pracy, są następujące:

1. Należałoby uporządkować terminologię, zunifikować symbolikę (nieraz ten sam obiekt jest oznaczany różnymi symbolami), nie używać niezdefiniowanych wcześniej symboli.
2. We wstępie należałoby w wyraźny sposób określić cele badawcze i zwięźle, ale możliwie precyzyjnie opisać, jak te cele są realizowane w kolejnych rozdziałach i jakie są wzajemne relacje między nimi. Obecny opis jest zbyt skrótowy i niejasny.
3. Autorka powinna wyraźnie wskazać, które z przedstawionych twierdzeń, lematów i wzorów są jej oryginalnymi wynikami badawczymi.
4. Wykaz oznaczeń na str. vii/viii jest niepełny, nie zawiera wielu oznaczeń występujących w tekście pracy.
5. Niektóre istotne wzory nie są numerowane, co utrudnia ewentualne odwoływanie się do nich.
6. Występują przypadki nieuzasadnionego użycia anglojęzycznej terminologii, np. „wniknijmy w jej definicję probabilistyczną oraz fuzzy” na str. 30, „odwzorowanie ze struktury probabilistycznej w strukturę fuzzy” na str. 40, czy „transformacja probability-possibility” na str. 41. Wskazane jest konsekwentne stosowanie polskiej terminologii w pracy pisanej w języku polskim.

A oto dalsze, szczegółowe uwagi:

Str. 3: Nie jest jasne, co znaczy „pomiar jest możliwy dzięki składaniu obiektów”

Str. 5/6: Zamiast GUM i Guide powinno być [19].

Str. 5/6: Metody oceny niepewności A i B zakładają model probabilistyczny bez podziału na błędy systematyczne i przypadkowe, z kolei na str. 8 błędy typu A są utożsamiane z niesystematycznymi (przypadkowymi?), a błędy typu B – z systematycznymi. W rezultacie nie wiadomo, jakie są relacje między błędami przypadkowymi, systematycznymi, typu A, typu B, definiowanymi probabilistycznie i definiowanymi jako liczby rozmyte. Ta nieokreśloność charakteru błędów występuje w kilku miejscach pracy i dezorientuje czytelnika.

Str. 6: Definicja błędu systematycznego na końcu tej strony jest wątpliwa.

Str. 7/8: Co znaczy "miara możliwości opisuje stopień przynależności kolejnego wzorca do badanego obiektu"? Czym są "kolejne wzorce"? Poza tym wzorzec kojarzy się z wartością dokładną, która jest przybliżana przez pomiar z pewnym błędem, więc wydaje się, że stopień przynależności powinien dotyczyć wyniku pomiaru, a nie wzorca. Relacje między wzorcami, obiektami i wynikami pomiarów są dokładniej opisane dopiero w rozdz. 3.2, o czym należałoby tutaj wspomnieć.

Str. 8: We wzorze 1.2 nie występuje delta z indeksem alfa definiowana jako promień cięcia na poziomie alfa. Nie są wcześniej zdefiniowane symbole "plus w kółku" (suma liczb rozmytych) i U . Czy delta z indeksem m oznacza to samo co ΔX z wykazu oznaczeń, czyli maksymalny błąd pomiaru? Jeśli tak, to po co jest użyty indeks m ?

Str. 9: Definicja $U(a)$ wymaga dokładniejszego objaśnienia. Czym są obiekty punktowe? Czy V to zbiór obiektów czy wyników pomiarów? Jest mowa o obiekcie a , ale funkcja delta zadaje porządek między wynikami pomiarów a i b , a nie między obiektami. Wydaje się, że delta to po prostu różnica między wynikami pomiarów, za pomocą której określany jest porządek w zbiorze V . Operacja "minus w kółku" nie jest zdefiniowana (odejmowanie liczb rozmytych). Czym jest komparator, czyli co z czym i jak porównuje? Gdzie jest dowód Twierdzenia 1? (Brak źródła.) Czy rozważania na str. 9/10 dotyczą modelu probabilistycznego czy rozmytego?

Str. 12: $A^{\sim}(x)$ z przykładu 1.4 na str. 11 nie jest przedziałem rozmytym, bo $[A^{\sim}]^{\alpha}$ nie są odcinkami dla $0 < \alpha < 1$.

Str. 13: Warunek monotoniczności t-normy jest błędnie sformułowany, powinno być $b \leq c \Rightarrow T(a,b) \leq T(a,c)$.

Str. 15: Należy zdefiniować operację "minus w kółku z indeksem T " jako różnicę liczb rozmytych względem t-normy.

Str. 19: Brak definicji symbolu I oznaczającego zbiór przedziałów w $\mathfrak{R}$.

Str. 20: Czym jest A w definicji 4?

Str. 28/29: Jeśli p_k występujące w (3.7) ma być bliskie jedności, a zgodnie z (3.9) $p_k = (1 - p)/2 < 1/2$, to mamy sprzeczność. Oprócz tego wydaje się, że warunek $P(X > 0) > p_k$ nie jest równoważny warunkowi $x_0 - U_p(X) > 0$. Należy się tu domyślać, że $X = X^b - X^a$. Poza tym we wzorach (3.10)-(3.12) brakuje parametru p . Niejasna jest też relacja między p i p_k .

Str. 29: W rozdz. 3.2, w definicji miary możliwości Π nie występuje t-norma, o której mowa zaraz po tej definicji. Oznaczenie zbioru obiektów mierzalnych jako Ω jest niezgodne z oznaczeniem V z wykazu oznaczeń na str. vii/viii. Jaka jest relacja między Ω i Γ oraz między odwzorowaniem Φ i zmienną rozmytą ksi ?

Str. 30: Przydałaby się „fizyczna interpretacja” wzoru (3.13) i występujących w nim wielkości, np. w formie odpowiedniego przykładu. Czym jest komparator? (Ta uwaga dotyczy też str. 9.) Termin "mesurand" występujący w kilku miejscach w pracy (tu w założeniu 5) należałoby zastąpić polskim „przedmiot pomiaru”, lub „mierzona wielkość”.

Str. 32: Czym są "wielkości ekstensywne"? Jaka jest relacja między wzorami (3.16) i (3.17)? Wydaje się, że w (3.17) zmienna Z powinna być zastąpiona przez X , a zmienne X i Y przez $X_1, \dots, X_N$. Co oznacza f w tym wzorze?

Str. 33: Z czego wynika założenie o rozkładzie błędów na dwie składowe we wzorze (3.18)? Czy chodzi tu o błąd systematyczny i przypadkowy, czy o błąd pochodzący z dwóch źródeł?

Str. 34: Jaka jest idea transformacji prawdopodobieństwo-możliwość, czyli przekształcenia stochastycznego modelu pomiaru w model rozmyty poprzez zamianę przedziałów ufności na alfa-cięcia? Teoretycznie, możliwe jest też przekształcenie odwrotne, czyli zamiana alfa-cięć na przedziały ufności. Dlaczego, jeśli mamy model probabilistyczny, nie jest on wystarczający? Odpowiedzi na te zasadnicze pytania powinny znaleźć się we wstępie.

Str. 34: Czym jest $FK(R)$ przed wzorem (3.22)? Gdzie jest dowód tego wzoru? Występujący w przedostatnim zdaniu "przewodnik" powinien być zamieniony na odwołanie do źródła [19].

Str. 35: Z czego wynika wzór (3.24)? Czy równość we wzorze (3.25) jest niezależna od t-normy?

Str. 36: wzór (3.26) jest równoważny ze wzorem (3.24). Taka, a nie inna definicja rodziny alfa-przekrojów wynika z faktu, że l_{p_1} zawiera się w l_{p_2} , jeśli $p_1 < p_2$.

Str. 37: czy celem rozdz. 3.4.1 jest znalezienie związku między łącznikiem (copula), a t-normą? Czy łącznik jest traktowany jako zadany? Wzór z całkami na str. 40 powinien mieć numer, podobnie jak inne istotne nienumerowane wzory.

Przedstawione w niniejszej recenzji uwagi dotyczą w części aspektów redakcyjnych, poza tym zalecają uporządkowanie aparatu pojęciowego używanego w pracy (w tym uspoźnienie stosowanych oznaczeń), dodanie ułatwiających lekturę wyjaśnień i przykładów, oraz korektę kilku błędów matematycznych. Stwierdzam przy tym, że zawartość merytoryczna pracy i opisane w niej wyniki, uzyskane przez doktorantkę, dowodzą znajomości podstawowych zagadnień teoretycznych w dziedzinie teorii pomiarów, oraz umiejętności samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Podsumowując, oceniam, że recenzowana praca spełnia w stopniu wystarczającym wymagania stawiane rozprawie doktorskiej i wnioskuję o dopuszczenie mgr inż. Kingi Marii Wójcickiej do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania jej stopnia doktora nauk technicznych w dyscyplinie Nauki Fizyczne w dziedzinie Nauki Ścisłe i Przyrodnicze.